

Grup Teori Final Sınavı Soruları

- 1- G bir grup, $g \in G$ olsun. $\forall a \in G$ için $f(a) = g a g^{-1}$ ile tanımlı f fonksiyonu bir grup otomorfizması mıdır?
- 2- G bir grup H , G 'nin alt grubu olsun. $N_G(H)$ kümesini tanımlayıp, G 'nin alt grubu olduğunu gösteriniz.
- 3- G sarpimsal bir grup olmak üzere $(G \times G) \times G \longrightarrow G$
 $((a, b), y) \longrightarrow (a \cdot b) * y = a y b^{-1}$ ile tanımlı $*$ fonksiyonu $G \times G$ grubunun, G üzerine etkisi midir?
- 4- $|G| = 35$ olan bir G grubunun 7 ve 5 mertebeli sylow alt grupları var mıdır? Normal alt grup mudur? Ayrıca G grubu devirli midir?

Grup Teori Dersi Cevap Anahtarı

1- $f: G \rightarrow G$
 $a \rightarrow f(a) = g a g^{-1}$

$\forall x, y \in G$ için $f(xy) = g(xy)g^{-1} = g(xg^{-1}gy)g^{-1}$
 $= (gxg^{-1})(gyg^{-1}) = f(x)f(y)$

$f(x) = f(y) \Rightarrow gxg^{-1} = gyg^{-1} \Rightarrow x = y$

$\forall y \in G$ için $f(x) = gxg^{-1} = y, \exists x \in G$ var.

2- $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$

$e \in G$ için $eHe^{-1} = H$ olup $N_G(H) \neq \emptyset$

$\forall g, h \in N_G(H) \Rightarrow gHg^{-1} = H, hHg^{-1} = H$

$h \in N_G(H) \Rightarrow hHh^{-1} = H \Rightarrow h^{-1}Hh = H \Rightarrow h^{-1}H(h^{-1})^{-1} = H$

$h^{-1} \in N_G(H)$ dir.

$(g h^{-1})H(g h^{-1})^{-1} = (g h^{-1})H(h g^{-1}) = g(h^{-1}Hh)g^{-1}$
 $= gHg^{-1} = H$

$N_G(H) \leq G$ bulunur.

3- $*$: $(G \times G) \times G \rightarrow G$

$* (a, b), y \rightarrow (a, b) * y = a y b^{-1}$

- $(e, e) \in G \times G$ için $(e, e) * y = e y e^{-1} = y$ olur.

- $\forall (a, b), (c, d) \in G \times G$ ve $\forall y \in G$ için

$(a, b) \cdot (c, d) * y = (ac, bd) * y = (ac)y(bd)^{-1}$
 $= a(cy d^{-1})b^{-1}$
 $= (a, b) * (cy d^{-1})$
 $= (a, b) * ((c, d) * y)$

bulunur.

$$4 - |G| = 3 \cdot 5 = 15$$

$$n_5 | 3, \quad n_5 = 1 + 5k$$

$$n_5 = 1, \quad n_5 = 6, 11$$

1 tane Sylow 5 alt grubu var P ise $P \triangleleft G$ dir.

$$n_7 | 3, \quad n_7 = 1 + 7k$$

$$n_7 = 1, \quad n_7 = 8$$

1 tane Sylow 7 alt grubu var Q ise $Q \triangleleft G$ dir

$|P| = 5$ ve $|Q| = 7$ olup de\u0131rli dirler.

$P = \langle a \rangle, \quad Q = \langle b \rangle$ olsun.

$$|P \cdot Q| = \frac{|P| \cdot |Q|}{|P \cap Q|} = \frac{5 \cdot 7}{1} = 35 \quad P \cdot Q = G, \quad P \cap Q = \{e\}$$

$G = \langle a, b \rangle$ de\u0131rli grup olur.